УДК 524.834

В. А. Юров, А. В. Япарова

УРАВНЕНИЕ АБЕЛЯ И НУЛИ ПОТЕНЦИАЛА КОСМОЛОГИЧЕСКОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Предложен новый аналитический метод, позволяющий элементарным образом строить решения, описывающие динамику вселенной в окрестности нулей потенциала космологического скалярного поля $V(\varphi)$.

This article presents a new simple analytical method that makes it possible to design solutions in describing the dynamics of the universe near the zeroes of the scalar field potential.

Ключевые слова: космология, уравнение Абеля, скалярное поле.

Key words: cosmology, Abel equation, scalar field.

Одной из самых важных моделей современной космологии по праву считается модель Фридмана — Робертсона — Уокера — Леметра, описывающая однородную изотропную вселенную с одноименной метрикой. В случае пространственно-плоской вселенной, заполненной скалярным полем φ, модель описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}+3H\dot{\varphi}+\dfrac{dV}{d\varphi}=0; \\ H^2=\dfrac{8\pi}{3M_P^2}\left(\dfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2+V\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $\varphi=\varphi(t)$ — скалярное поле; $V=V(\varphi)$ — потенциал скалярного поля; $a=a(t)$ — масштабный фактор; $H=\dot{a}/a$ — параметр Хаббла, а точка обозначает производную по времени.

Основная задача исследователей заключается в решении системы (1) при заданном виде потенциала $V(\varphi)$. К сожалению, поскольку (1) представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, нахождение ее решений даже для простейших потенциалов представляет собой нетривиальную математическую проблему. Более того, для физически важных задач типа моделей со свободным массивным полем ($V=m^2\varphi^2/2$) или моделей с самодействием ($V=\lambda\varphi^4/4$) уравнения (1) и вовсе оказываются неинтегрируемыми. Все это приводит к необходимости разрабатывать принципиально новые подходы к исследованию системы (1). Один из таких подходов — метод сведения системы (1) к уравнению Абеля первого рода [1—3], основанный на методе суперпотенциала (см. [4—8]). Здесь под суперпотенциалом подразумевается полная плотность энергии скалярного поля W [9]:

$$W=\frac{1}{2}\dot{\varphi}+V(\varphi). \tag{2}$$

Легко убедиться, что заданная таким образом функция W связана с остальными космологическими параметрами (φ, H) посредством следующих формул:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \mp \frac{M_P^2}{\sqrt{24\pi}} \frac{W'(\varphi)}{\sqrt{W(\varphi)}}; \tag{3}$$

$$H = \pm \frac{1}{M_P}\sqrt{\frac{8\pi}{3}W}\,, \tag{4}$$

где штрих обозначает производную по φ.

Таким образом, зная функцию W, из дифференциального уравнения с разделяющимися переменными (3) легко найти зависимость между φ и t, которая, будучи подставлена в (4), позволит установить вид функции $H(t)$, а следовательно, и $a(t)$. Для того чтобы замкнуть нашу систему уравнений, осталось лишь установить связь между суперпотенциалом W и потенциалом V. Такая связь была установлена в [2] в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $x = 4\sqrt{3\pi}\,/\,M_P\varphi$, $\chi = \ln|V|$, $\kappa = \pm 1$. Для заданного потенциала $V(\varphi)$ соответствующий суперпотенциал $W = W(x, C)$ имеет вид:

$$W(x,C) = V(x)\left(1 + \frac{1}{y^2 - 1}\right), \tag{5}$$

где $y = y(x, C) \neq \pm 1$ — общее решение следующего уравнения Абеля первого рода:

$$y' = -\frac{1}{2}\left(y^2 - 1\right)\left(\kappa - \chi' y\right). \tag{6}$$

При этом особый случай $V \equiv 0$ соответствует решению $y = \pm 1$ и приводит к суперпотенциалу W вида:

$$W = Ce^{\kappa x}. \tag{7}$$

Данная теорема оказалась чрезвычайно удобным инструментом для исследования свойств решений космологических уравнений (1), в частности при изучении инфляционных режимов в ранних вселенных для неинтегрируемых моделей $V = m^2\varphi^2/2$, $V = \lambda\varphi^4/4$, а также для обобщенной модели $V = m^2\varphi^2/2 + \lambda\varphi^4/4$ [3].

В настоящей работе нас будет интересовать обобщение второй части утверждения теоремы 1: мы будем искать вопрос о том, как должно выглядеть общее решение уравнения (6), если дифференцируемая функция $V(x)$ обращается в ноль, но только в одной точке $x = x_c$ [1]. Задача осложняется тем, что в пределе $x \to x_c$ значения функций χ и χ' стремятся к $-\infty$ то, и поэтому результат интегрирования будет зависеть от того, какое значение в точке x_c примет y. Всего возможны два случая: $y(x_c) \neq 0$ и $y(x_c) = 0$. Рассмотрим их по порядку.

---

[1] Разумеется, все нижеприведенные рассуждения могут быть обобщены на случай потенциала $V(x)$, имеющего не более чем счетное число корней.

Случай 1: $y(x_c) \neq 0$.

Пусть $y(x_c) \neq y_c = 0$. Легко видеть, что в этом случае существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_c| < \varepsilon$, справедливо соотношение

$$|\chi'(x)y(x)| >> 1.$$

Это означает, что для всех x, лежащих в ε-окрестности точки x_c, уравнение (6) может быть переписано как

$$y' = \frac{1}{2}\left(y^2 - 1\right)\chi'(x)y\ . \tag{8}$$

Уравнение (8) элементарно интегрируется в явном виде:

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{1 \pm C|V(x)|}}, \tag{9}$$

где $C = \left|\dfrac{y_0^2 - 1}{y_0^2 V(x_0)}\right|$ — константа интегрирования; знак «+» или «–» под корнем выбирается исходя из начальных условий, причем при интегрировании мы учитываем, что физически корректные начальные условия имеют вид $y(x_0) = y_0$, где $|y_0| > 1$, если $V(x_0) > 0$, и $|y_0| < 1$, если $V(x_0) < 0$. Принимая во внимание, что в пределе при $x \to x_c$ точное решение уравнения Абеля должно стремиться к приближенному, из (9), (3) и (5) получаем:

$$\lim_{x\to x_c} W(x) = \mp\frac{1}{C}\lim_{x\to x_c}\frac{V}{|V|}; \quad \lim_{x\to x_c} W'(x) = \mp\frac{\kappa}{C}\lim_{x\to x_c}\frac{V}{|V|};$$

$$\lim_{x\to x_c}\dot{\varphi} = \mp\kappa\lim_{x\to x_c}\mathrm{sgn}(y)\sqrt{\mp\frac{2}{C}\frac{V}{|V|}},\ \ |y| > 1; \quad \lim_{x\to x_c}\dot{\varphi} = \mp\kappa\lim_{x\to x_c}\sqrt{\mp\frac{2}{C}\frac{V}{|V|}},\ \ |y| < 1,$$

где для $\dot{\varphi}$ знак перед корнем определяется выбором знака параметра Хаббла, а знак под корнем соответствует выбору знака под корнем в решении уравнения Абеля.

Заметим, что если потенциал сохраняет свой знак при переходе через точку $x = x_c$, то пределы слева и справа от x_c будут одинаковы. Если потенциал знак меняет, то суперпотенциал и его производная терпят разрыв первого рода, а $\dot{\varphi}$ имеет действительный предел с одной стороны и мнимый с другой, и это приводит к тому, что все космологические параметры становятся комплексными. Данный результат означает одно из двух: либо меняющие знак потенциалы не являются физически допустимыми, либо следует предположить, что для выполнения условия физичности нашего решения в точке $x = x_c$ необходимо сшить две ветви решений уравнения Абеля — $|y|>1$ и $|y|<1$ — так, чтобы слева и справа пределы W, W′ и $\dot{\varphi}$ были одинаковы. Из этого условия, зная постоянную интегрирования в одном из решений, можно однозначно получить постоянную интегрирования для выбора второго решения для сшивки.

Случай 2: $y(x_c) = 0$.

Поскольку, по предположению, $y(x)$ является непрерывной функцией, должно существовать такое $\varepsilon > 0$ для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_c| < \varepsilon$, и будет справедливо соотношение $|y(x)| << 1$. Следовательно, для всех x, лежащих в ε-окрестности точки x_c, уравнение (6) может быть переписано как

$$y' = \frac{1}{2}\left(\kappa - \chi' y\right). \tag{11}$$

Уравнение (11) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Для упрощения дальнейших рассуждений, добавим начальное условие $y(x_0) = y_0$, где $x_0 \neq x_c$[2], причем начальное условие $|y_0| < 1$ физически допустимо, только если $V(x_0) < 0$. Решением получившейся задачи Коши будет функция

$$y(x) = \frac{y_0 + \frac{\kappa}{2}\int_{x_0}^{x} U(\xi)d\xi}{U(x)}, \tag{12}$$

где $U(x) = \sqrt{\left|\frac{V(x)}{V(x_0)}\right|}$.

Требование $y(x_c) = 0$ означает, что должно выполняться условие

$$y_0 = -\frac{\kappa}{2}\int_{x_0}^{x_c} U(\xi)d\xi . \tag{13}$$

Обратим внимание, что, согласно (10), для решения (12) с начальным условием (13) $\dot{\varphi}(x_c) = 0$. Более того, вид соответствующих космологических переменных ($\varphi(t)$, $H(t)$, $a(t)$) устанавливается прямой подстановкой (12) в (5), (3) и (4) и требует решения одного (!) дифференциального уравнения с разделяющимися переменными (3).

В качестве иллюстрации рассмотрим пример простейшего потенциала с одним нулем:

$$V(x) = x - x_c, \qquad x < x_c, \qquad x > x_c . \tag{14}$$

Прямой подстановкой в (13) (положив для простоты $x_0 = 0$) получаем выражение:

$$y = \frac{\sqrt{x_c}\left(y_0 + \frac{\kappa}{3}x_c\right) - \frac{\kappa}{3}\left(x_c - x\right)^{3/2}}{\sqrt{x - x_c}},$$

откуда, приняв во внимание требование $|y| << 1$ для всех x, близких к x_c, мы сразу приходим к условию

$$y_0 = -\frac{\kappa}{3}x_c .$$

---

[2] Если $V(x)$ имеет более одного нуля, следует выбирать точку x_0, лежащую в интервале $x \in \left(\tilde{x}_c ; x_c\right)$, где $\tilde{x}_c$ — ближайший к x_c корень уравнения $V(x) = 0$.

В итоге имеем следующее решение:

$$y(x) = \frac{\kappa}{3}(x - x_c). \tag{15}$$

Подставив (15) в (12), а затем в (5), (3) и (4), а также приняв во внимание то, что масштабный фактор $a = a_0 \exp\left(\int_0^t H(\tau) d\tau\right)$, прямым вычислением получаем

$$\varphi(t) = \varphi_c - \frac{2\sqrt{3\pi}}{M_P}(t_c - t)^2;$$

$$H(t) - \pm\frac{64\pi^2}{M_P^4}(t_c - t)^3;$$

$$a(t) = a_c \exp\left(\pm\frac{16\pi^2}{M_p^4}(t_c - t)^4\right).$$

В заключение имеет смысл сказать несколько слов о погрешности изложенного метода. Поскольку для одновременного выполнения условий $V(x_c) = 0$ и $y(x_c) = 0$ при приближении к точке x_c решение уравнения (6) должно сходиться к y, то переход от приближенного уравнения (11) к точному уравнению (6) должен привести к небольшой коррекции величины y_0, то есть она будет равна

$$y_0 = -\frac{\kappa}{2}\int_{x_0}^{x_c} U(\xi) d\xi + \delta,$$

где δ — это поправка, зависящая от величины $|y_0|$.

Для того чтобы оценить величину этой поправки, можно рассмотреть следующее приближение 2-го порядка:

$$\tilde{y}' = (1 - \tilde{y}^2) y'; \ |\tilde{y}| < 1; \ \tilde{y}(x_c) = 0. \tag{16}$$

Поскольку (16) — уравнение с разделяющимися переменными, приходим к решению вида:

$$\ln\frac{1 + \tilde{y}}{1 - \tilde{y}} = 2(y - y_0) + \ln\frac{1 + \tilde{y}_0}{1 - \tilde{y}_0}, \tag{17}$$

а значит, решение в явном виде выглядит так:

$$\tilde{y} = \frac{Ce^{2y} - 1}{Ce^{2y} + 1}, \tag{18}$$

где константа C будет

$$C = \frac{1 + \tilde{y}_0}{1 - \tilde{y}_0} e^{-2y_0}. \tag{19}$$

Из (18) видно, что $\tilde{y} \to 0$, когда $y \to 0$, только если $C = 1$. Согласно (19), это эквивалентно условию

$$\tilde{y}_0 = \frac{1 - e^{-2y_0}}{1 + e^{-2y_0}}. \tag{20}$$

Условие (20) можно переписать через гиперболический тангенс[3]:

$$\tilde{y}_0 = \tanh y_0 \,. \qquad (21)$$

Вспомним, что y_0 близка к нулю (по предположению!), а значит (согласно разложению tanh в ряд Тейлора),

$$\tilde{y}_0 \approx y_0 - \frac{1}{3} y_0^3 + O\left(y_0^5\right) \approx y_0 \,, \qquad (22)$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, мы показали, что для всех y_0, близких к нулю, искомая поправка $\delta = \left| y_0 - \tilde{y}_0 \right|$ является малой величиной 3-го порядка и может быть вычислена как

$$\delta = \frac{\left| y_0 \right|^3}{3} = \frac{1}{24} \left(\int_{x_0}^{x_c} U(\xi) d\xi \right)^3 .$$

Список литературы

1. *Yurov V.A.* An application of Abel's equation of first kind to the search of solutions of Friedman's equations // Вестник РГУ им. И. Канта. 2010. Т. 4. С. 43—47.
2. *Yurov A.V., Yurov V.A.* Friedman vs. Abel: A connection unraveled // Journal of Mathematical Physics. 2010. Vol. 51. P. 082503: 1—17.
3. *Yurov A.V., Yaparova A.V., Yurov V.A.* Application of Abel Equation of 1st kind to in ation analysis for non-exactly solvable cosmological models // European Physical Journal. 2014. Vol. 20, Iss. 2. P. 106—115.
4. *Muslimov A. G.* On The Scalar Field Dynamics In A Spatially Flat Friedman Universe // Class. Quant. Grav. 1990. Vol. 7. P. 231—237.
5. *Salopek D.S., Bond J.R.* Nonlinear evolution of long-wavelength metric fluctuations in inflationary models // Phys. Rev. D. 1990. Vol. 42. P. 3936—3962.
6. *Bazeia D., Santos M.J. dos, Ribeiro R.F.* Solitons in systems of coupled scalar fields // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 208. P. 84—88.
7. *Aref'eva I.Ya., Koshelev A.S., Vernov S.Yu.* Crossing the w = – 1 barrier in the D3-brane dark energy model // Phys. Rev. D. 2005. Vol. 72. P. 064017: 1—11.
8. *Yurov A.V., Yurov V.A., Chervon S.V., Sami M.* Total energy potential as a superpotential in integrable cosmological models // Theoretical and Mathematical Physics. 2011. Vol. 166, Iss. 2. P. 299—311.
9. *Chervon S.V., Zhuravlev V.M., Shcigolev V.K.* New Exact Solutions in Standart Inflationary Models // Phys. Lett. B. 1997. Vol. 395. P. 269—273.

Об авторах

Валериан Артёмович Юров — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: vayt37@gmail.com

Анна Валентиновна Япарова — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: lisa74@yandex.ru

---

[3] В связи с этим интересно отметить, что для $C = 1$ выполняется еще более общее условие: $\tilde{y}(x) = \tanh y(x)$.

About the authors

Dr Valerian Yurov, Associate Professor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: vayt37@gmail.com

Anna Yaparova, PhD student, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: lisa74@yandex.ru